Список литературы

1. Садовский, А.П. *Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 472–481.

А. И. Жук

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t), x_0 \in \mathbb{R}$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$ – непрерывные функции ограниченной вариации на отрезке T.

Уравнение (1) содержит произведение обобщенных функций, поэтому не является корректным, в связи с этим, его решение зависит от подхода к трактовке подобного рода задач. Одним из таких подходов является концепция новых обобщенных функций.[1]

Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная прямая. На множестве последовательностей из элементов $\mathbb{R}$ введем отношение эквивалентности: $(x_n) \sim (y_n)$, если $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $x_n = y_n$, обобщенным числом назовем класс эквивалентности $\widetilde{x} = [(x_n)]$. Множество обобщенных чисел обозначим $\widetilde{R}$. Рассмтрим подмножество $H = \{\widetilde{h} \in \widetilde{R} : \widetilde{h} = [(h_n)]$, $h_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0\}$.

На множестве всех последовательностей f_n таких, что $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, введем отношение эквивалентности: $(f_n) \sim (g_n)$, если $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = g_n(x)$. Класс эквивалентности $[(f_n)]$ будем называть мнемофункцией [1] и обобзначать $\widetilde{f}$. Обозначим через $G(R)$ множество всех мнемофункций. Алгебру мнемофункций вида $\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [(f_n(x_n))]$, где $\widetilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{R}$, а $[f_n(x)] \in G(R)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, обозначим $G(\widetilde{R})$. Определим на $G(\widetilde{T})$ обобщенный дифференциал

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [(f_n(x + h_n) - f_n(x))], \quad \widetilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{T}, \quad \widetilde{h} \in H.$$

Будем говорить, что мнемофункция $\widetilde{f} = [(f_n)]$ ассоциирует элемент f из некоторого топологического пространства Ω, если последовательность $\{f_n\}$ при $n \to \infty$ сходится к f в топологии Ω. Заменим обычные функции в (1) на соответствующие им новые обобщенные функции, получим:

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}), i = \overline{1,p} \tag{3}$$

$$\widetilde{x}|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})} = \widetilde{x}_0, \tag{4}$$

где $\widetilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\widetilde{t} = [\{t_n\}] \in \widetilde{T}$, и $\widetilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\widetilde{f} = [\{f_n(x)\}]$, $\widetilde{x}_0 = [\{x_{n0}(t)\}]$, $\widetilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ и $L_n \to L$, $x_{n0} \to x(0)$.

Таким образом, под решением задачи Коши уравнения (1), (2) будем понимать ассоциированное решение задачи Коши (3), (4). Если заменить в (3), (4) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p} \tag{5}$$

$$x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t). \tag{6}$$

Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L^j(t+s)\rho_n(s)\,ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho \subseteq$ $\subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)\,ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_1,\ldots,x_p) = n^p\widetilde{\rho}(nx_1,\ldots,nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$, $\widetilde{\rho} \geqslant 0$, $\int_{[0,1]^p} \widetilde{\rho}(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\ldots\,dx_p = 1$, $\operatorname{supp}\widetilde{\rho} \subset [0,1]^p$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0,h_n)$, $m_t \in \mathbb{N}$. Заметим, что τ_t зависит от h_n и необходимо записывать τ_{th_n}, но для упрощения обозначений этого делать не будем. Несложно видеть, что решение системы (5), (6) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t+kh_n)],$$

где $i = \overline{1,p}$.

При некоторых дополнительных условиях функция x_n^j будет гладкой, поэтому при этих условиях решение задачи (5), (6) определяет новую обобщенную функцию, которая является решением задачи (3), (4). Эти условия описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для любых представителей* $(f_n^{ij}) \in \widetilde{f}^{ij}$, $(L_n^j) \in \widetilde{L}^j$, $(x_n^i) \in \widetilde{x}^i$, $(x_{n0}^i) \in \widetilde{x}_0^{\,i}$ *выполняется условие:*

$$\frac{d^l}{dt^l}[x_{n0}^i(h_n-t) - x_{n0}^i(t)] - \sum_{j=1}^{q}\frac{d^l}{dt^l}[f_n^{ij}(t,x_{n0}(t))[L_n^j(h_n+t) - L_n^j(t)]] \to 0,$$

при $t \to +0$ *для любых* $l = 0,1,2,\ldots$, *тогда решение задачи Коши (3), (4) в* $G(T)$ *существует и единственно.* [2]

Для описания предельного поведения решения задачи Коши (5), (6) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(s,x(s-))\,dL^j(s), \quad i = \overline{1,p}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j =$ $= \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные функции ограниченной вариации. Тогда ассоциированное решение задачи Коши (3), (4) является решением системы уравнений (7) в пространстве* $L^p(T)$, *если* $|x_{n0}(\tau_t)-$ $- x_0| \to 0$ *в пространстве* $L^p(T)$.

Аналогичная теорема в случае поточечной сходимости была получена в [3].

Список литературы

1. Лазакович Н.В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Докл. НАН Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 23–27.

2. Каримова Т.И. *Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2009. № 2. С. 81–86.

3. Жук А.И., Яблонский О.Л. *Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57. № 6. С. 20–23.

М. В. Игнатенко, Л. А. Янович

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ ЛАГРАНЖЕВА ТИПА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $X = X(T)$ – заданное пространство гладких на $T \subseteq \mathbb{R}$ функций, на котором определен оператор $F : X \to Y$, где Y – также некоторое функциональное пространство.

Под лагранжевым операторным интерполированием, как и в случае скалярных функций, понимается интерполяция, при которой интерполяционный полином совпадает с интерполируемым оператором в заданных узлах.

В работе [1] построен операторный многочлен лагранжева типа, содержащий интегралы Стилтьеса, в виде

$$L_n(F;x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^1 l_{n,k}[x(\tau)]\, d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau,\cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))], \tag{1}$$

где функция

$$\chi(\tau,\ t) = \begin{cases} 1, & \tau \geqslant t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases} \quad 0 < \tau < 1, \quad \chi(0,t) \equiv 0, \quad \chi(1,t) \equiv 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$l_{n,k}(x)$ – фундаментальный интерполяционный многочлен Лагранжа относительно узлов $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ и чебышевской системы функций $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^n$; $l_{n,k}(x_j) = \delta_{kj}$ $(k, j = 0, 1, \dots, n)$.

Если, например, $\{\phi_k(x) = x^k\}_{k=0}^n$ – алгебраическая система функций, то фундаментальный многочлен $l_{n,k}(x)$ задается формулой

$$l_{n,k}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

где $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$. В данном случае от узлов интерполирования требуется, чтобы $x_i(t) - x_j(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ при $i \neq j$ $(i, j = 0, 1, \dots, n)$.

Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$L_n(F; x_k) = F(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n). \tag{2}$$

Если сумма фундаментальных многочленов $\sigma_n(x(t)) = \sum_{k=0}^n l_{n,k}(x(t))$ – постоянная величина, как в случае алгебраической системы функций, то формула (1) является точной для операторных многочленов вида

$$Q_n(x) = a_0(s) + \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{n} \int\limits_0^1 a_{ij}(s,t) \frac{d^j}{dt^j} \{\phi_i(x(t))\}\, dt,$$